Glimmの方法による荷電スカラー場のハミルトニアンの定義について (ハミルトニアンの定義とスペクトル)

青木, 昌三

数理解析研究所講究録
208巻 1974年 104-117

Glimmの方法による荷電スカラー場のハミルトニアンの定義について

香川大 教育　青木昌三

先の講演で宮武さんが，正準変換を順次くり返し行うことに依りハミルトニアンを対角化する話をされ，例として *Neutral scalar field with fixed sources* 及び *Isoscalar meson fields with fixed sources* の場合を取り扱われた。ここでは原点に固定された核と相互作用をする荷電スカラー場を例にとりながら Glimm の方法によるハミルトニアンの定義の仕方について，その問題点を述べ，宮武さんの講演へのコメントとしたい。

1. Glimmの方法。[1]

今ハミルトニアン

$$H = H_0 + g H_I \tag{1}$$

を考える。H_0は自由場のハミルトニアンで自己共役演算子である。gは相互作用定数，H_Iは相互作用ハミルトニアンである。H_Iがそれ自身では演算子として定義され得ない場合について，全体としてのHを定義

することを考えよう。話を簡単にするために、high momentaを cut-off した時には H_{I} はよく定義された演算子であり、この時の H は自己共役演算子として定義されているとする。この時 cut-off $\to \infty$ とした時も適意味をもつ演算子 T を用いて

$$(H+R)T = TH_0 + \text{error term}\,(\text{有界演算子}) \qquad (2)$$

とすることが出来たとする。ここで R は cut-off $\to \infty$ では定義されない演算子が無限大に発散するような定数項で、ハミルトニアン H に対するくりこみ項であり $H_{ren} \equiv H + R$ はくりこまれたハミルトニアンである。T はスペクトル変換、或いは dressing 変換と呼ばれている。(2)式が成立する時 H_{ren} は(2)式を通じて cut-off $\to \infty$ で定義されることとなる。以上が Glimm の方法によるハミルトニアンの定義の仕方の大筋である。実際に Glimm はこの方法により2次元 Yukawa 模型(Y_2 theory)に於て、運動量の切断をもったハミルトニアンのグラフ極限として、切断を伴なわない(但し空間の切断はもった)くりこまれたハミルトニアンを定義した。[1)]

ハミルトニアンについて言えば、単に定義するだけでなく更にその自己共役性や下に有界なることなどを云う必要があり、そのためには、H_{ren} のレゾルベントの cut-off $\to \infty$ での収束性(レゾルベント収束)などを証明することが必要となる。演算子列のグラフ極限で定義された演算子の自己共役性とレゾルベント収束との関連についてはここでは詳しくはふれない[2)]。

宮武さんの方法は、(2)式のTに相当する変換を、何回かの(或いは無限回の)正準変換の積で求めようとするものであり、実際上はgのある次数まででHを対角化しようとする試みである。

上に述べたGlimmの方法を実際に具体的なハミルトニアンに適用するためには、(2)式からも判る様にR及びTを知ることが必要である。R及びTの求め方としてはこれまで摂動論を手懸りとするものが採用されてきた。R, Tをgの巾に展開して求めるのである。GlimmはY_2理論に於てFriedrichsの処方[3]を忠実に遂行することに依りR, Q [但し $T=\exp Q$] をgの2次について求めたのであった。[1] 尚現在ではHepp[4]によって与えられた表式によりR, Tを求めることが多くなされている。 いずれにせよ、gの巾に展開してR, Tを求める方法が有効である為には、Rに現われる発散項(cut-off→∞で定義されない項)がgのある次数以上では現われないことが重要である(superrenormalizable)。これまでGlimmの方法によってうまく定義されたハミルトニアンは全てこのsuperrenormalizableなものである。[1, 4~7] 発散の次数が有限でありさえすれば、その次数までRなりQを求めておけば、とに角不都合な項はくりこみによって消去出来、残りはcut-off→∞で定義され得るのである。この方法でこれまで成功裏に取り扱われた模型では、例えばY_2がgの3次以上で有限、$(\phi^3)_3$模型ではエネルギーのくりこみは2次で発散、4次以上で有限、$(\phi^3)_2$模型ではくりこみ不要(発散項なし)[5]、HeppのY_{3+1}模型[4]では2次のくりこみで十分

であり，一般にLee模型typeは2次までくりこんでおけばGlimmの方法で定義出来る[4),6)]。Eckmann[7)]によって取り扱われた，多数の粒子生成を伴った模型に於ても，事情はLee模型と同じで，質量のくりこみ項は g の高次まで存在するが，発散項は2次だけである。

2. ハミルトニアン

荷電スカラー場が原点に固定された核と相互作用をする場合の，次のハミルトニアンを考える。

$$H = H_0 + gH_I \tag{3}$$

$$H_0 = \int dk\,\omega(k)\,a^*(k)a(k) + \int dk\,\omega(k)\,b^*(k)b(k)$$

$$H_I = \int dk\,v(k)\tau_-[b(-k)+a^*(k)] + \int dk\,\bar{v}(-k)\tau_+[a(-k)+b^*(k)]$$

ここで $a^*(k)$, $b^*(k)$ [$a(k)$, $b(k)$] は夫々正及び負の中間子の生成[消滅] 演算子であり，交換関係は

$$[a(k), a^*(k')] = \delta(k-k'), \qquad [a^\#(k), a^\#(k')] = 0$$

$a^\#(k)$ は $a(k)$ 又は $a^*(k)$ を表わす。$b^\#(k)$ についても同じ交換関係が成立する。$\omega(k)=\sqrt{k^2+m^2}$ で $m>0$ は中間子の質量。τ_+, τ_- は

$$\tau_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \tau_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

であり，陽子の状態を $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，中性子状態を $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ としている。

$[2\omega(k)]^{1/2}v(k)$ は，原点のまわりの相互作用の広がりを与える関数のフーリエ変換である。陽子，中性子の質量は共に0としている。

上のハミルトニアンについて知られていることをまとめると次の通りである[8)]。 i) $v\in L_2$ の時 $D(H_I)\supset D(H_0)$ で H_I について次の評価が成立している。

$$\|gH_I\psi\| \le 4g\|v\|_2\frac{1}{m}\left[\frac{m}{\varepsilon}\|\psi\|+\varepsilon\|H_0\psi\|\right] \quad \text{for } {}^{\forall}\psi\in D(H_0)$$

ε は任意の正数で，$\|v\|_2<\infty$ なので g の値にかかわらず $4g\frac{\|v\|_2}{m}\varepsilon<1$ とすることが出来，これから H は A-type の正則摂動の理論* によって定義され $D(H)=D(H_0)$ となる。H は自己共役である。

ii) $v/\omega^{1/2}\in L_2$ の時 H_I は bilinear form で定義され，

$$|(\psi, gH_I\psi)| \le a(\psi, H_0\psi)+b(\psi,\psi),\ a<1 \quad \text{for } {}^{\forall}\psi\in D(H_0^{1/2})$$

の評価が得られるので B-type の正則摂動の理論** によって H は $(\psi,(H_0+gH_I)\psi)$ を bilinear form とする様な自己共役演算子として定義される。以上の結果は中性スカラー場の場合と同じである。尚 i), ii) の場合とも energy shift の摂動計算に於て，g の各巾で発散は現われない。

H のスペクトルについては i) の場合，最小固有値は $g=0$ の近傍では g に関して解析的に H_0 の固有値 0 に接続し***，十分小さな g に対しては g の巾に展開出来る。事実 H の isolated な固有

---

* Ref. 9) P377 , ** Ref. 9) P398. , *** Ref. 9) P365～。

値の0からのずれ……核が中間子の雲を着ることによるエネルギーのずれ。これはHの最小固有値を0に調整するためにHに加えられるべきcounter termである……は $g < m/4^2\|v\|_2$ を満す程度の十分小さな g に対しては，せいぜい $m/2$ 以内なのである*。このことは $v \in L_2$ なる場合に，十分小さな g に対してエネルギーのずれを摂動展開によって求めることの有効性，即ち g の各次数に於て現われる項が有限のみならず，全体として級数が収束することを示している。但し具体的にずれをはっきりと求めることは困難である。

我々がGlimmの方法を適用したいのは $v/\omega \in L_2$ の場合である。この場合先に述べたmomentum cut-offを取り除くことは v を $v \in L_2$ から $v/\omega \in L_2$ なるclassに拡張することに対応する。中性スカラー場の場合にはこの方法に依り $v_n \in L_2$ なるハミルトニアンの列 H_n のグラフ極限として $v/\omega \in L_2$ の場合のハミルトニアンを定義することが出来た[10]。

先ず $v \in L_2$ なる場合について(2)式のRに相当するものとして，核のenergy shiftを具体的に摂動で求め，その中で v を $v/\omega \in L_2$ のクラスへと拡張した時に発散する項と発散しない項を区別することが必要である。発散する項はHにくりこみ，適

---

* Ref. 9) P287

当なTを用いて(2)式の左辺を計算した時に右辺に発散項が現われない様にすれば良い。

ところで実際に摂動で energy shift を計算してみると結果はどうか?。 g の各次数に於て現われる各々の項は全て，vを $v/\omega \in L_2$ のクラスへと拡張した時には発散してしまうのである。2次の項は明らかに発散項である。次に2次の項のくりこみを考慮にいれて4次の項を計算しても結果は又発散し，4次の項までくりこんでも再び6次の項も発散する。この様にして，gの何次までで発散が収まるか見当がつかないのである。このことは，中性スカラー場の場合には発散項は2次までで，この項をくりこんでおけば計算に4次以上の項が全然現われなかったことと対照的である。この両者の比較から荷電スカラー場の難しさがはっきりとするのであるが，そのことは後程述べることとし，次に宮武さんの方法で低次の場合について具体的に計算し，問題点をはっきりとさせたい。

3. 宮武さんの方法による g の6次までの計算。

$$T_0 = \exp g S_1 \tag{4}$$

ここで

$$S_1 = \int dk\, \omega(k)^{-1} \left[\bar{v}(k) a(k) \tau_+ - v(k) a^*(k) \tau_- + v(-k) b(k) \tau_- - \bar{v}(-k) b^*(k) \tau_+ \right]$$

$$S_1^+ = -S_1 \quad , \qquad [S_1, H_0] = H_I$$

なる変換 T_0 を用いて H を変換すると，g の 6 次までで

$$
\begin{aligned}
H_1 \equiv\ & T_0^{-1} H T_0 \qquad\qquad (5) \\
=\ & H_0 + G_2 \left[-2g^2 \frac{1}{2!} + 4g^4 G_3 \frac{3}{4!} - 32 g^6 G_3^2 \frac{5}{6!} \right] \\
& + H_I \left[-2g^3 G_3 \frac{2}{3!} + 16 g^5 G_3^2 \frac{4}{5!} \right] \\
& - (A+B) \left[g^2 \frac{1}{2!} - 8 G_3 g^4 \frac{3}{4!} + 64 g^6 G_3^2 \frac{5}{6!} \right] \\
& - D \cdot 4 G_2 \left[g^4 \frac{3}{4!} - 8 g^6 G_3 \frac{5}{6!} \right] + \cdots\cdots
\end{aligned}
$$

ここで

$$G_2 = \int |v(k)|^2 / \omega(k) \, dk \quad \cdots\cdots \quad \frac{v}{\omega} \in L_2 \text{ の時 発散}$$

$$G_3 = \int |v(k)|^2 / \omega(k)^2 \, dk \quad \cdots\cdots \quad 〃 \quad < \infty$$

であり，A，B，D は

$$
\begin{aligned}
A =\ & \tau_3 \int dk\, dk' \, a^*(k) a(k') v(k) \bar{v}(k') \left[\omega(k)^{-1} + \omega(k')^{-1} \right] \\
& - \tau_3 \int dk\, dk' \, b^*(k) b(k') \bar{v}(-k) v(-k') \left[\omega(k)^{-1} + \omega(k')^{-1} \right]
\end{aligned}
$$

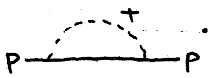
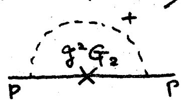
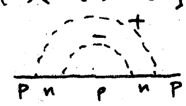
$$
\begin{aligned}
B =\ & \tau_3 \int dk\, dk' \, a^*(k) b^*(k') v(k) \bar{v}(-k') \left[\omega(k)^{-1} - \omega(k')^{-1} \right] \\
& + \tau_3 \int dk\, dk' \, a(k) b(k') \bar{v}(k) v(-k') \left[\omega(k)^{-1} - \omega(k')^{-1} \right]
\end{aligned}
$$

$$\tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
D = \int dk\, dk' \Big\{ & v(k) \bar{v}(-k') \frac{1}{\omega(k)\omega(k')} a^*(k) b^*(k) \\
& + \bar{v}(k) v(-k') \frac{1}{\omega(k)\omega(k')} a(k) b(k') \\
& - v(k) \bar{v}(k') \frac{1}{\omega(k)\omega(k')} a^*(k) a(k') \\
& - \bar{v}(-k) v(-k') \frac{1}{\omega(k)\omega(k')} b^*(k) b(k') \Big\}
\end{aligned}
$$

で ……………は生成，消滅演算子が3ケ以上の項（$v/\omega \in L_2$の時に定義され得ないものを含む）及びgの6次以上のエネルギー項，H_I項等を表わしている。勿論のことながらT_0は$v/\omega \in L_2$なる場合にも稠密に定義され得る演算子であり，(5)式の右辺のDも又$D(H_0)$上で定義される……但しDの係数G_2は発散項である……

(5)式から次のことが言えよう。

i) エネルギーのくりこみ項（(5)式の第2項）は$v/\omega \in L_2$なる時$G_2=\infty$より全ての次数で発散 … superrenormalizable? 。g^2の項はグラフ的には  or  に対応している。g^4項はエネルギーのくりこみに正しく対応していず，上記のT_0の代りに$T_0' = \exp[S_1 + \Gamma B/2]$を用いると［$\Gamma$はFriedrichsの$\Gamma$-演算］ g^4項は $g^4[G_2 G_3 - \int dk dk' |v(k)|^2 |v(k')|^2 / \omega^2(k)[\omega(k)+\omega(k')]]$ ($=\infty$ for $\frac{v}{\omega} \in L_2$) となり 正しく  +  に対応する。

ii) (5)式の右辺に$\frac{v}{\omega} \in L_2$なる時には演算子として定義されないH_IやA, B等が現われており，例えばこのg^3の次数のH_Iを消す様な変換を再びほどこしても，より高い次数に於てH_I項が再び現われる。もともと都合の悪かったH_Iが変換の後再び現われることから，結局無限回の変換を行わねばならないであろう。

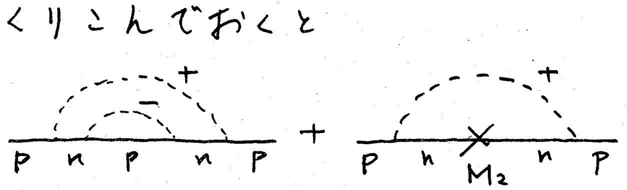
上に選んだT_0は1つの例であり，より適切な変換を選ぶな

らば、上記の様な困難を取り除くことが出来るかも知れない。しかしこのことが、(3)式のハミルトニアンには相互作用定数のくりこみが必要であると云う事実と関係があるとするならば、問題はそう簡単ではないであろう。とに角上の様なことから、くりこみ定数や変換Tを簡単に書き表わすことは容易でなく、Glimmの方法を荷電スカラー場に適用することは、中性スカラー場の時の様に簡単にゆきそうにはない。

4. 中性スカラー場との比較。

先にも少しふれた様に、中性スカラー場の場合には、2次のエネルギー項をくりこんでおけば4次以上の摂動項は現われない。このことは高次の項において非常に見事な打ち消し合いが起っていることを示している。この場合の高次の項が消える機構と荷電スカラー場の場合とを比較すれば、後者の様子がうまく理解出来る。尚この高次の項が消える仕組については別にまとめて発表の予定[11]なので、ここでは得られた結果のみを用いることとする。(注意の項参照)

先ず4次の項(M_4と書く)を比較すると、荷電スカラー場の場合のM_4は、M_2をくりこんでおくと

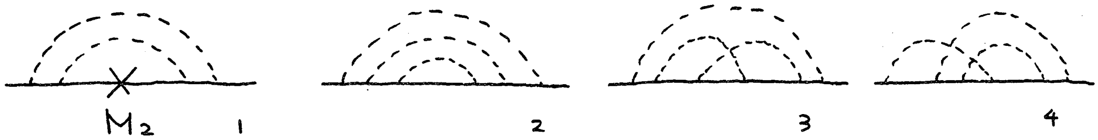
$M_4 =$ 

(或いは $p \leftrightarrow n$ としたもの)

と表わされ，中性スカラー場に比して，荷電保存則から

のグラフに相当するものが存在しない。3つのグラフを合わせたものが丁度0となる(中性スカラー場)のであるから$M_4 \neq 0$で，これは $\nu/\omega \in L_2$ の時は発散する。

M_6はどうか。中性スカラー場の場合には17のグラフを含みこれらが0となる。少し詳しく言うと，17のグラフは5つのグループに分けられ各々のグループで0となる。例えば17のグラフの中，次の4つのグラフを考えよう。

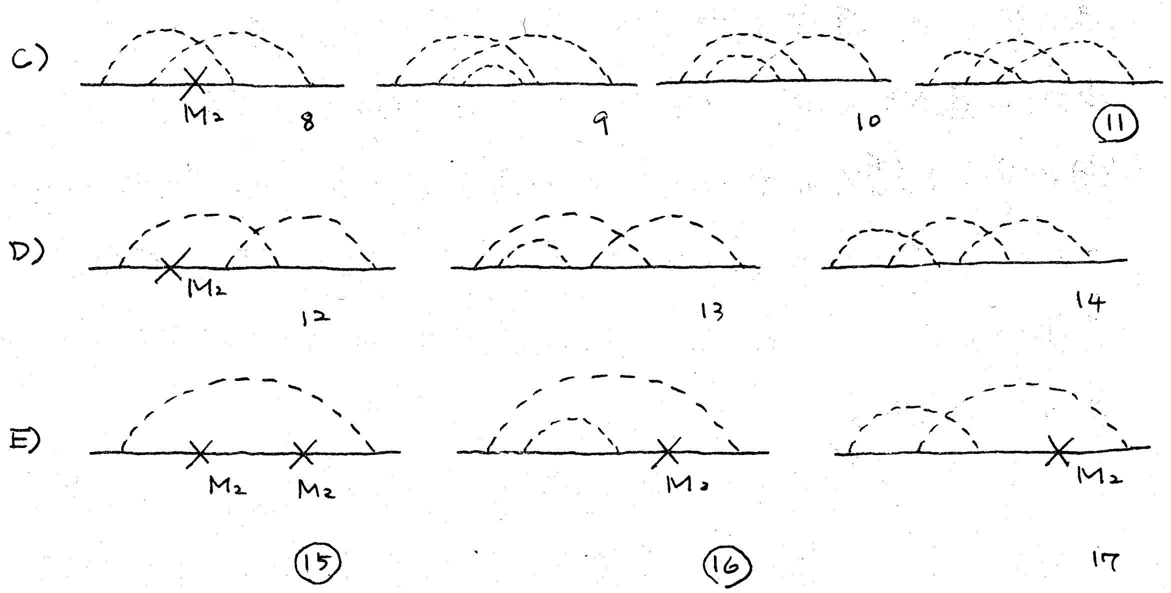
A) 

これらの4つのグラフの寄与は0となる。ところが荷電スカラー場の場合にはこの中1と2のグラフしか許されず，従って0とならない。次のグループでも同じである。

B) 

5 + 6 + 7 = 0 であるが，荷電がある場合には7は許されず，残りの5と6のグラフの和は0とならない。残りのグラフに就いても同様のことが言える。結果のみを，蛇足ながら付け加えておく。グラフの番号を○で囲んであるのが荷電ス

カラー場の場合に存在するグラフである。



以上個々のグループについてみてきたが，M_6に寄与する項全体ではどうか。荷電スカラー場に対してはM_2をくりこんだグラフを入れて7つとなりこれらは0とならない。これにM_4をくりこんだグラフによる寄与を加えても尚0とならないのである。

計算の結果によると

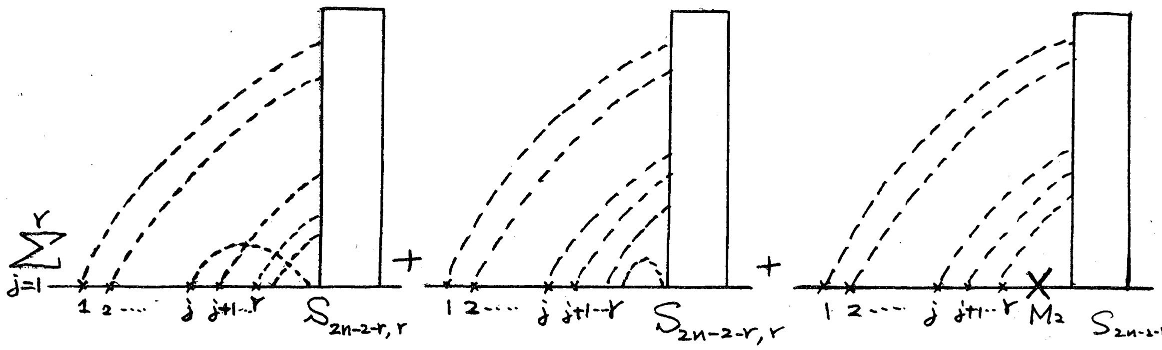
$$M_6 = 4g^6 \int dk\,dk'\,dk'' \,|v(k)\,v(k')\,v(k'')|^2 \Big/ \omega(k)\,\omega(k')\,\omega(k'')\,[\omega(k)+\omega(k')]\,[\omega+\omega'+\omega'']$$

で $v/\omega = L_2$ の時　$M_6 = \infty$ となる。

以上の様に，エネルギーのくりこみ項は，vを $v \in L_2$ から $v/\omega \in L_2$ に拡張した時に有限となりそうにはない。中性スカラー場の場合の高次の項の打ち消し合いが，ある意味では余りにも見事であり過ぎる訳で，荷電保存則の制約によって，

グラフ数が中性スカラー場のグラフよりも少くなる荷電スカラー場に於ては，高次の項の打ち消し合いが起らず，あくまでも予測に過ぎないが，vを$v/\omega \in L_2$に拡張した場合には発散項がずっと続くのではないかと考えられる。その意味で(3)式のハミルトニアンはsuperrenormalizableでない訳で，Glimmの定義の方法をこのハミルトニアンに適用するにはまだまだ問題があるといえる。

注意：中性スカラー場の場合，次に示されるグラフの間で打ち消し合いが起ることが判っている。[11] 今$S_{n,r}$をgの次数がnでr個の中間子生成演算子をもつグラフを表わすものとする（一般にいくつかのグラフが含まれる）。M_{2n}（n整数）は一般に



のグラフを$r=1$から$n-1$まで加えたもので表わされるが，実は上のグラフの間で打ち消し合いが起るのである。

REFERENCES

1) J. Glimm, Commun. math. Phys. 5 (1967), 343.

J. Glimm, Commun. math. Phys. 6 (1967), 61.

J. Glimm, Varenna Lectures, Course 45 (1968), 97.

J. Glimm and A. Jaffe, Ann. Phys. 60 (1970), 321.

2) J. Glimm and A. Jaffe, Pure Appl. Math. 22 (1969), 401.

麦林・青木, 数理解析研講究録, 159 (1972), 40.

3) K. O. Friedrichs, Perturbation of Spectra in Hilbert Space (Amer. Math. Soc.,Providence, 1965)

4) K. Hepp, Théorie de la renormalisation (Springer-Verlag, Berlin, 1969)

5) J. Glimm and A. Jaffe, Proceedings of Summer Institute on Partial Differential Equations, Berkeley (1971) (Amer. Math. Soc., Providence, 1973)

K. Osterwalder, Fortschr. Phys. 19 (1971), 43.

6) R. Schrader, Commun. math. Phys. 10 (1968), 155.

A. v. Zolotariuk, Kiev preprint ITP-72-48E(1972), ITP-73-33P(1973).

M. Aoki, Mem. Fac. Educ., Kagawa Univ., II 217 (1973), 5.

7) J. -P. Eckmann, Commun. math. Phys. 18 (1970), 247.

S. Albeverio, Helv. Phys. Acta, 45 (1972), 303.

8) Y. Kato and N. Mugibayashi, Prog. Theor. Phys. 30 (1963), 103.

N. Mugibayashi and Y. Kato, Prog. Theor. Phys. 31 (1964), 300.

9) T. Kato, Perturbation Theory for Linear Operators (Springer-Verlag, 1966)

10) M. Aoki and N. Mugibayashi, Prog. Theor. Phys. 48 (1972), 281.

11) M. Aoki, to appear in Mem. Fac. Educ., Kagawa Univ., (1973).